

12

Teorías de la causalidad del campo electromagnético

La teoría de la relatividad preserva el principio universal de causalidad de que ninguna causa puede preceder a su efecto. Esto conlleva que ninguna acción se puede propagar más rápidamente que la velocidad de la luz, y a tener que modificar el concepto de simultaneidad de sucesos entre sistemas inerciales con movimiento uniforme relativo.

El electromagnetismo cumple de forma implícita con la teoría de la relatividad restringida y la velocidad de la luz siempre aparece como el límite al cual se puede propagar las señales y la información.

Sin embargo, las ecuaciones de Maxwell, aunque para su resolución en función de las fuentes conducen a campos retardados por la velocidad finita de la propagación de la velocidad de la luz, en su formulación como un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales se hace siempre para un mismo instante.

El que las ecuaciones de Maxwell solo hagan referencia a todos los valores del campo en un mismo instante de tiempo, hizo sospechar a Jefimenko que dichas ecuaciones no eran en realidad más que unas identidades que ocultaban el origen causal real que producía los campos, y que llevaban a aseveraciones inexactas como que un campo magnético variable crea un campo eléctrico. La ley de Faraday y la ley de Ampère son reglas operativas que aunque funcionan en la práctica ocultan sin embargo la realidad causal de los procesos.

Según demuestra Jefimenko, el campo eléctrico y magnético son dos campos duales independientes cuyo origen se debe solo a las cargas y corrientes existentes en el sistema y a como varían con el tiempo. Su formulación aunque es más compleja que

la clásica habitual, sin embargo, ilustra de forma más clara de cómo ocurren causalmente determinados procesos electrodinámicos.

Si bien las ecuaciones de Jefimenko es una forma alternativa más rigurosa de formular el electromagnetismo desde un punto de vista causal, sin embargo, no dejan de ser una reformulación formal de las ecuaciones de Maxwell. Si lo que prevalece es el principio de causalidad, debe haber alguna forma de llegar a las ecuaciones causales de Jefimenko desde primeros principios. Partiendo de este criterio Heras reformuló las ecuaciones del electromagnetismo clásico demostrando que las ecuaciones de Jefimenko para el campo electromagnético eran equivalentes a postular como único principio la conservación de la carga local para todos los tiempos causales retardados.

Principio de la causalidad

El principio de causalidad establece, que dos sucesos $(\vec{x}_1, t_1)$ y $(\vec{x}_2, t_2)$ en la trayectoria de una partícula siempre deben ocurrir en el mismo orden en todos los marcos de referencia espacio temporales, y están conectados causalmente si

$$|\vec{x}_2 - \vec{x}_1| \leq c|t_2 - t_1|$$

El ordenamiento temporal de dos sucesos conectados causalmente es un invariante, que está relacionado con la invarianza de la velocidad de la luz, y que según el principio de la relatividad restringida es también la velocidad máxima posible para la transmisión de la información. El principio de la teoría de la relatividad es consistente con el principio de causalidad e implica propagaciones a velocidades finitas.

Una ecuación es causal, cuando el primer miembro de la ecuación es un observable físico que es producido por las magnitudes del segundo término de la ecuación que son variables causales en el tiempo.

¿Porqué la las ecuaciones de Maxwell no son causales?

Jefimenko hizo la observación de que las ecuaciones de Maxwell están evaluadas en un mismo instante de tiempo t y por tanto el primer no puede ser una consecuencia del segundo miembro.

Si observamos el primer par de ecuaciones cinemáticas de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Ausencia de polos magnéticos

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\partial_t \vec{B}$$

Ley de Faraday

vemos que están evaluadas para un mismo instante de tiempo.

Lo mismo sucede para el segundo par de ecuaciones dinámicas de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_e \quad \text{Ley de Coulomb}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J} + \partial_t \vec{D} \quad \text{Ley de Ampère}$$

En el caso de ley de Faraday y de la ley de Ampère los campos y sus derivadas $\vec{E}$, $\partial_t \vec{B}$ y $\vec{H}$, $\partial_t \vec{D}$ se toman en el mismo instante y, por tanto, no puede haber causalidad entre ellos. Según Jefimenko es erróneo decir que la variación en el tiempo de la inducción magnética crea un campo eléctrico o que la corriente de desplazamiento debida a la variación de $\vec{D}$ crea un campo magnético $\vec{H}$. Afirma que las relaciones que existen entre ellos en las ecuaciones de Maxwell son solo identidades que no nos dicen nada de los procesos por los que se generan realmente los campos.

Causalidad del campo electromagnético. Ecuaciones de Jefimenko

Jefimenko asume que las ecuaciones de Maxwell son identidades válidas, pero que no expresan el verdadero origen causal del campo electromagnético.

Para analizar cuál es el origen las ecuaciones de Maxwell y de la causalidad de los campos electromagnéticos, según Jefimenko hay que partir desde el principio de las propiedades generales de un campo vectorial.

Según el teorema de Poisson que ya vimos en el capítulo de teorías vectoriales, cualquier campo vectorial $\vec{a}(\vec{x})$ que se anula en el infinito está totalmente determinado por su divergencia y su rotacional.

$$\vec{a} = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\vec{\nabla}' (\vec{\nabla}' \cdot \vec{a}') - \vec{\nabla}' \wedge (\vec{\nabla}' \wedge \vec{a}')}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}'$$

Cuando aparezca una prima como en $\vec{\nabla}'$ significa que el operador actúa la variable $\vec{x}'$. Asimismo la notación $\vec{a}'$ indica que $\vec{a}$ se evalúa en $\vec{x}'$.

Se define la siguiente notación para la posición relativa

$$\vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} \vec{x} - \vec{x}' \quad r \stackrel{\text{def}}{=} |\vec{r}| = |\vec{x} - \vec{x}'|$$

y los vectores unitarios

$$\vec{r}_u \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{r}}{r} \quad \vec{r}'_u \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\vec{r}}{r}$$

siendo $\vec{x}$ un punto de observación en se miden los campos y $\vec{x}'$ esta situado en punto de las fuentes.

Por tanto $\vec{r}_u$ es un vector unitario dirigido desde el punto de integración $\vec{x}'$ al punto de observación $\vec{x}$, y $\vec{r}_u$ va desde el punto de observación $\vec{x}$ al punto de integración $\vec{x}'$.

Por V_∞ se indica que la integración de volumen se extiende a todo el espacio.

Si consideramos el vacío sin fuentes, el campo eléctrico según el teorema de Helmholtz se puede escribir de forma integral como

$$\vec{E}(\vec{x}) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\vec{\nabla} \wedge \partial_t \vec{B}}{r} d^3\vec{x}'$$

Haciendo uso de las identidades en la anterior expresión

$$\frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{a}}{r} = \vec{\nabla} \wedge \frac{\vec{a}}{r} + \frac{\vec{a} \wedge \vec{r}_u}{r^2}$$

$$\int_{V_\infty} \vec{\nabla} \wedge \vec{a} d^3\vec{x}' = - \int_{S_\infty} \vec{a} \wedge d\vec{S}' = 0$$

ya que los campos vectoriales suponemos que se anulan en el infinito, introduciendo las anteriores identidades en la ecuación del campo eléctrico obtenemos

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\partial_t \vec{B} \wedge \vec{r}_u}{r^2} d^3\vec{x}'$$

Puesto que $\vec{E}$ y $\partial_t \vec{B}$ están tomados en un mismo instante de tiempo no puede haber una relación causal entre ellos.

De igual forma

$$\vec{H} = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{H}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{H})}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3\vec{x}' = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\partial_t \vec{D} \wedge \vec{r}_u}{r^2} d^3\vec{x}'$$

Al estar tomados $\vec{H}$ y $\partial_t \vec{D}$ en un mismo instante de tiempo tampoco puede haber una relación causal entre ellos.

Sin embargo, debe observarse que el teorema de Helmholtz anteriormente utilizado es válido solo para campos estáticos.

En el caso de que campos vectoriales que varían con el tiempo, el teorema de Poisson se puede generalizar mediante la expresión de los potenciales retardados

$$\vec{a}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{a}) - \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{a}) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{a}}{\partial t^2} \right]}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}'$$

donde ahora una función F entre corchetes $[F]$ significa que tiene que ser evaluada en el punto $\vec{x}'$ en el instante retardado

$$t' \stackrel{\text{def}}{=} t - \frac{r(t')}{c} = t - \frac{[r]}{c}$$

donde ahora

$$r(t') = |\vec{x}(t) - \vec{x}'(t')|$$

Si se da por correctas las ecuaciones de Maxwell como identidades, aplicando el teorema de Poisson extendido, el campo electromagnético en el vacío toma las siguientes expresiones integrales

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\left[\vec{\nabla} \rho' + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j} \right]}{r} d^3 \vec{x}'$$

$$\vec{H}(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\vec{\nabla} \wedge \vec{j}]}{r} d^3 \vec{x}'$$

423

Si calculamos el rotacional del campo eléctrico $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ obtenemos

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \wedge \frac{\left[\vec{\nabla} \rho' + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j} \right]}{r} d^3 \vec{x}' = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \wedge \frac{[\partial_t \vec{j}]}{r} d^3 \vec{x}'$$

De igual forma haciendo uso de las identidades

$$\begin{aligned} \frac{[\vec{\nabla} \wedge \vec{a}]}{r} &= \vec{\nabla} \wedge \frac{[\vec{a}]}{r} + \vec{\nabla} \wedge \frac{[\vec{a}]}{r} \\ \partial_t [\vec{a}] &= [\partial_t \vec{a}] \end{aligned}$$

se puede calcular la variación con el tiempo de la inducción magnética

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{B} &= \mu_0 \partial_t \vec{H} = \frac{\mu_0}{4\pi} \partial_t \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \wedge \frac{[\vec{j}]}{r} d^3 \vec{x}' + \frac{\mu_0}{4\pi} \partial_t \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \wedge \frac{[\vec{j}]}{r} d^3 \vec{x}' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi c^2} \partial_t \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \wedge \frac{[\vec{j}]}{r} d^3 \vec{x}' - \frac{\mu_0}{4\pi} \partial_t \int_{S_\infty} \frac{[\vec{j}]}{r} \wedge \vec{S}' = -\frac{\mu_0}{4\pi c^2} \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \wedge \frac{[\partial_t \vec{j}]}{r} d^3 \vec{x}' \end{aligned}$$

Comparando las ecuaciones de $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ y $\partial \vec{B} / \partial t$ vemos que se verifica

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} \equiv -\partial_t \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \wedge \frac{[\partial_t \vec{j}]}{r} d^3 \vec{x}$$

Por tanto, según Jefimenko la ley de Faraday es simplemente una identidad en que coinciden $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}$ y $-\partial_t \vec{B}$, pero que en la realidad están relacionados de forma más profunda con la variación retardada de rotacional de la corriente eléctrica que es la que los genera.

Siguiendo el mismo argumento, se puede determinar el origen del principio de causalidad de la corriente de desplazamiento en la ley de Ampère.

Si consideramos que no existen corrientes de cargas $\vec{j} = 0$ será

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \wedge \frac{[\vec{\nabla} \wedge \vec{j}]}{r} d^3 \vec{x} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\vec{\nabla} \wedge [\vec{\nabla} \wedge \vec{j}]}{r} d^3 \vec{x} = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \wedge \frac{[\vec{\nabla} \wedge \vec{j}]}{r} d^3 \vec{x} \\ \vec{\nabla} \wedge \vec{H} &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{j}]}{r} d^3 \vec{x} \end{aligned}$$

424

de igual forma

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{D} &= \varepsilon_0 \partial_t \vec{E} = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \partial_t \left[\frac{\vec{\nabla} \rho + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j}}{r} \right] d^3 \vec{x} = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\left[\vec{\nabla} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j} \right]}{r} d^3 \vec{x} \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\left[\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j} \right]}{r} d^3 \vec{x} \end{aligned}$$

habiéndose hecho uso de la ecuación de la continuidad de la carga

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

Restando las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} - \partial_t \vec{D} = -\frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{\left[\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{j}) - \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{j} - \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{j} \right]}{r} d^3 \vec{x} \equiv \vec{j}$$

Por tanto, la ley de Ampère no es sino una consecuencia fortuita de la identidad de la diferencia de $\vec{\nabla} \wedge \vec{H}$ y $\partial_t \vec{D}$ con $\vec{J}$, ya que ambas son en realidad unas funciones unas funciones complejas que dependen de la variaciones retardadas de $\vec{J}$.

La ley de Ampère según Jefimenko no es tampoco una relación causal como habitualmente se dice.

Las verdades ecuaciones causales para $\vec{E}$ y $\vec{H}$ hay que buscarlas en relación con la variación de las cargas y las corrientes.

Si se hace uso de las identidades

$$\begin{aligned}\partial_t[X] &= [\partial_t X] \\ \vec{\nabla}[X] &= -\frac{\vec{r}_u}{c} \partial_t[X] \\ \vec{\nabla}[X] &= [\vec{\nabla} X] + \frac{\vec{r}_u}{c} \frac{\partial[X]}{\partial t} \\ \frac{\vec{\nabla}[X]}{r} &= \vec{\nabla} \frac{[X]}{r} + \vec{\nabla} \frac{[X]}{r} \\ \vec{\nabla} \wedge [\vec{X}] &= \left[\vec{\nabla} \left(\frac{[\vec{J}]}{r} + \frac{[\partial_t \vec{J}]}{rc} \right) \wedge \vec{X} \right] - \vec{\nabla} \wedge [X]\end{aligned}$$

donde X es un función a la que incluso le puede preceder un operador vectorial sobre la que actúa vectorialmente $\vec{\nabla}$, entonces la ecuaciones integrales para $\vec{E}$ y $\vec{H}$ se pueden transformar a las expresiones

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \left(\frac{[\rho]}{r^2} + \frac{1}{rc} [\partial_t \rho] \right) \vec{r}_u d^3\vec{x} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \vec{J}]}{r} d^3\vec{x} \\ \vec{H}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \left(\frac{[\vec{J}]}{r^2} + \frac{[\partial_t \vec{J}]}{rc} \right) \wedge \vec{r}_u d^3\vec{x}\end{aligned}$$

Las anteriores ecuaciones fueron deducidas por Jefimenko, y representan una generalización de las ecuaciones integrales para el campo electromagnético en función de las fuentes para el caso dependiente del tiempo.

Estas ecuaciones indican que son las fuentes de cargas y corrientes las únicas causas que generan los campos electromagnéticos $\vec{E}$ y $\vec{H}$.

Puesto que ambas ecuaciones tienen un término que depende de $\partial_t \vec{J}$ se crean simultáneamente los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$ cuando la corriente varía con él.

En principio el campo eléctrico $\vec{E}$ es debido a tres causas: la presencia de una densidad de carga ρ , su variación con el tiempo $\partial_t \rho$, y de la variación con el tiempo de la corriente $\partial_t \vec{J}$.

El campo magnético se debe solo a dos causas: la existencia de una corriente $\vec{J}$, y a su variación con el tiempo $\partial_t \vec{J}$.

Mediante las ecuaciones de Jefimenko para el campo electromagnético, se puede ver que es una falsa creencia que los campos eléctrico y magnético se pueden crear uno a otro.

En realidad los campos eléctrico y magnético son una entidad dual que son creados por las cargas y las corrientes y su variación con el tiempo.

La ilusión de la creación mutua procede de que en los sistemas independientes del tiempo los campos aparecen prácticamente simultáneamente, mientras su relación de causalidad respecto a las fuentes (en particular la variación de la corriente) permanece oculta.

Las ecuaciones para $\vec{E}$ y $\vec{H}$ tienen un elemento causal común que procede de la variación de la corriente retardada con el tiempo.

Sin embargo una vez creados los campos $\vec{E}$ y $\vec{H}$, estos coexisten sin ninguna influencia uno en el otro.

Por tanto, según Jefimenko, es una ilusión el efecto de inducción de Faraday de la creación de un campo eléctrico por la variación con el tiempo de un campo magnético.

Lo mismo se puede decir de la corriente de desplazamiento $\partial \vec{D} / \partial t$, cuyo origen en realidad es debida a la variación con el tiempo de las fuentes, o a un desplazamiento de las cargas que residen dentro de un dieléctrico tal como lo formuló correctamente Maxwell, y que posteriormente se reinterpretó erróneamente.

En las ecuaciones de Jefimenko para el campo electromagnético desempeña un papel importante el término de electrocinético

$$\vec{E}_K = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \vec{J}]}{r} d^3 \vec{x}$$

La fuerza generada por este campo es diferente de la fuerza electrostática y está dirigida en la dirección opuesta de la corriente, y existe mientras esta cambie con el tiempo.

Este campo electrocinético ejerce una fuerza sobre las cargas de los conductores próximos que provoca corrientes inducidas que se pueden asociar con la ley de inducción de Lenz y de Faraday.

Si se define el potencial vector electrocinético

$$\vec{A}_K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{1}{r} [\vec{J}] d^3\vec{x}$$

entonces existe la relación habitual entre el campo electrocinético y el potencial vector

$$\vec{E}_K = -\partial_t \vec{A}_K$$

Mediante las ecuaciones de Jefimenko se pueden reinterpretar de forma simple los efectos producidos por el movimiento de corrientes y dipolos magnéticos.

Si una corriente estacionaria $\vec{J}(\vec{x})$ respecto a sistema de ejes coordenados S se mueve respecto a un observador en un sistema S' con una velocidad $\vec{v}$, entonces este último verá una corriente aparente

$$\vec{J}' = \vec{J}(\vec{x}) - \vec{v}t$$

por lo que se verificará

$$\partial_t \vec{J}' = -(\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{J}$$

y teniendo en cuenta la identidad

$$\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{J}) = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{J} + \vec{v} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{J} + (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} + \vec{J} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{J} + \vec{v} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{J}$$

el campo electrocinético se reescribirá como

$$\begin{aligned} \vec{E}_K &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{J})]}{r} d^3\vec{x} - \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\vec{v} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{J}]}{r} d^3\vec{x} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\vec{\nabla}(\vec{v} \cdot \vec{J})]}{r} d^3\vec{x} - \vec{v} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

De forma similar al campo eléctrico, el campo electrocinético ejerce una fuerza sobre una carga situada en él. Sin embargo, la causa es debida solo al campo producido por una corriente en movimiento.

Consideremos ahora el caso del desplazamiento de un dipolo magnético con una velocidad no relativista $v \ll c$, por lo que se puede despreciar los efectos de retardo

Si hacemos uso de la identidad

$$\frac{\vec{\nabla}[X]}{r} = \vec{\nabla} \frac{[X]}{r} + \vec{\nabla} \frac{[X]}{r}$$

con $X = \vec{v} \cdot \vec{J}$, entonces el campo electrocinético toma la expresión

$$\begin{aligned} \vec{E}_K &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \frac{\vec{v} \cdot \vec{J}}{r} d^3\vec{x} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \frac{\vec{v} \cdot \vec{J}}{r} d^3\vec{x} - \vec{v} \wedge \vec{B} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{S_\infty} \frac{\vec{v} \cdot \vec{J}}{r} d\vec{S} + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \frac{\vec{v} \cdot \vec{J}}{r} d^3\vec{x} - \vec{v} \wedge \vec{B} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \frac{\vec{v} \cdot \vec{J}}{r} d^3\vec{x} - \vec{v} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

Si consideramos corrientes en conductores lineales cerrados en que $\vec{J} d^3\vec{x} = I d\vec{l}$ donde I es la intensidad de corriente que circula y las dimensiones lineales de la superficie S que encierra es mucho menor que la distancia de del conductor a punto de observación $r^2 \gg S$, y hacemos también uso de la identidad

$$\oint_C \vec{\phi} d\vec{l} = - \int_{S_C} \vec{\nabla} \phi \wedge d\vec{S}$$

Entonces el campo electrocinético se puede aproximar por la expresión

$$\begin{aligned} \vec{E}_K &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_C \vec{\nabla} \frac{\vec{v} \cdot d\vec{l}}{r} - \vec{v} \wedge \vec{B} = - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\vec{v} \cdot \int_{S_C} \frac{\vec{r}_u}{r^2} \wedge d\vec{S} \right) - \vec{v} \wedge \vec{B} \approx \\ &\approx - \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \left(\vec{v} \cdot \frac{\vec{r}_u}{r^2} \wedge \vec{S} \right) - \vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{\nabla} \left(\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{r}_u}{r^2} \cdot \vec{v} \wedge \vec{S} \right) - \vec{v} \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

Ya vimos que el campo eléctrico $\vec{E}_d$ creado por un dipolo eléctrico $\vec{p}$ es

$$\vec{E}_d = - \vec{\nabla} \left(\frac{\vec{p} \cdot \vec{r}_u}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)$$

Si definimos el dipolo eléctrico equivalente como

$$\vec{p} = I \frac{\vec{v} \wedge \vec{S}}{c^2} = \frac{\vec{v} \wedge \vec{m}}{c^2}$$

donde $\vec{m}$ es el dipolo magnético creado por una espira de corriente I que encierra una superficie S , entonces se verifica

$$\vec{E} = \vec{E}_K + \vec{E}_d = -\vec{v} \wedge \vec{B}$$

y vemos por tanto que una corriente en movimiento genera no solo un campo electrocinético sino también un campo eléctrico dipolar ordinario.

Conservación de la carga como origen de la causalidad del campo electromagnético

Si bien las ecuaciones de Jefimenko dan una descripción casi completa del origen causal del campo electromagnético, sin embargo, para su deducción se parte de que las ecuaciones de Maxwell que supone son válidas a priori.

Sin embargo, se plantea la cuestión de si es posible deducir unas ecuaciones causales del campo electromagnético a partir de unos pocos principios fundamentales generales.

Heras hace una elegante deducción de las ecuaciones de causalidad de Jefimenko simplemente partiendo solo de la validez de la conservación local de la carga en todo instante de tiempo retardado

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0$$

429

Con esta simple hipótesis Heras demuestra que existen siempre dos campos vectoriales $\vec{E}$ y $\vec{B}$ que verifican las ecuaciones

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{C_E}{4\pi} \int_{V_\infty} \left(\frac{[\rho]}{r^2} + \frac{[\partial_t \rho]}{rc} \right) \vec{r}_u d^3 \vec{x} - \frac{1}{c^2} \int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \vec{j}]}{r} d^3 \vec{x}$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{C_B}{4\pi} \int_{V_\infty} \left(\frac{[\vec{j}]}{r} + \frac{[\partial_t \vec{j}]}{rc} \right) \wedge \vec{r}_u d^3 \vec{x}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{C_E}{C_B c^2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = C_E \rho$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = C_B \vec{j}_e + \frac{C_B}{C_E} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

que son las ecuaciones de Jefimenko para el campo electromagnético que verifican también las ecuaciones de Maxwell.

C_E y C_B son unas constantes libres que dependen del sistema de unidades elegido.

Mantenemos la notación de que una función A entre corchetes $[A]$ indica que debe ser evaluada en $\vec{x}$ en el tiempo retardado $t' = t - r(t)/c$ y

$$\begin{aligned}\vec{r} &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{x} - \vec{x}' & r &\stackrel{\text{def}}{=} |\vec{r}| = |\vec{x} - \vec{x}'|, \\ \vec{r}_u &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{r}}{r} & \text{y} \\ \vec{r}_u' &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\vec{r}}{r}\end{aligned}$$

siendo $\vec{x}$ el punto de observación en el que se miden los campos $\vec{r}_u$ el vector unitario dirigido hacia ese punto desde la fuente. Se verifica entonces

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}_r &= \frac{\vec{r}_u}{r} \\ \vec{\nabla} \frac{1}{r} &= -\frac{\vec{r}_u}{r^2}\end{aligned}$$

Reproduciremos de forma simplificada el teorema de Heras, ya que considera cual es el mínimo de supuestos necesarios para desarrollar toda la teoría causal de las ecuaciones clásicas de Maxwell.

Heras parte de la hipótesis de que la ecuación de continuidad es válida para toda posición y tiempo, y por tanto, para su posición en un tiempo retardado

$$\left[\frac{\partial \rho'}{\partial t}\right] + \vec{\nabla} \cdot [\vec{J}] = 0$$

siendo

$$[\rho'] \equiv \rho(\vec{x}, t' = t - \frac{r}{c})$$

El retardo se puede representar mediante una delta de Dirac

$$\begin{aligned}[\rho'] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_r) \rho(\vec{x}, t') dt' = |\rho(\vec{x}, t')|_{t'=t-[r]/c} \\ [\vec{J}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_r) \vec{J}(\vec{x}, t') dt' = |\vec{J}(\vec{x}, t')|_{t'=t-[r]/c}\end{aligned}$$

y donde t_r es la función

$$t_r = t' - t + \frac{r(t')}{c}$$

De igual forma se tiene

$$\begin{aligned} [\vec{\nabla} \cdot \rho] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_r) \vec{\nabla} \rho(\vec{x}, t) dt \\ \vec{\nabla} \cdot [\vec{J}] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_r) \vec{\nabla} \cdot \vec{J}(\vec{x}, t) dt \\ [\partial_t \rho] &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_r) \partial_t \rho(\vec{x}, t) dt \end{aligned}$$

La delta de Dirac retardada verifica las siguientes igualdades básicas de utilidad

$$\begin{aligned} \partial_t \delta(t_r) &= -\partial_{t_r} \delta(t_r) = \delta'(t_r) \\ \vec{\nabla} \delta(t_r) &= -\vec{\nabla}_r \delta(t_r) \\ \vec{\nabla} \delta(t_r) &= -\frac{\vec{r}_u}{c} \partial_t \delta(t_r) = \frac{\vec{r}_u}{c} \delta'(t_r) \\ \nabla^2 \delta(t_r) &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta(t_r)}{\partial t^2} - \frac{2}{rc} \partial_t \delta(t_r) = \frac{1}{c^2} \delta''(t_r) + \frac{2}{rc} \delta'(t_r) \\ \vec{\nabla} \wedge (\vec{a} \delta(t_r)) &= -\frac{\vec{r}_u \wedge \vec{a}}{c} \delta'(t_r) \end{aligned}$$

Las siguientes igualdades serán también necesarias para efectuar el cálculo del campo electromagnético a partir de los potenciales vectores retardados que dependen de forma integral de la delta de Dirac retardada

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \left(\frac{\delta(t_r)}{r} \right) &= -\frac{\vec{r}_u}{r^2} \delta(t_r) + \frac{\vec{r}_u}{cr} \delta'(t_r) \\ \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{v}}{cr} \delta(t_r) \right) &= -\frac{\vec{v}}{c} \wedge \vec{\nabla} \frac{\delta(t_r)}{r} \end{aligned}$$

La derivada $\delta'(t) = \partial_t \delta(t)$ de la función delta de Dirac tiene la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t - t_0) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \partial_t \delta(t - t_0) dt = -\partial_t f(t)|_{t=t_0}$$

Las anteriores igualdades son fáciles de comprobar, como por ejemplo

$$\vec{\nabla} \delta(t_r) = \frac{\partial}{\partial r} \delta(t - t' + r/c) \vec{\nabla} r = \delta'(t_r) \frac{\partial t_r}{\partial r} \vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}_u}{c} \delta'(t_r)$$

Empleando las anteriores igualdades se obtiene el resultado

$$\partial_t [\rho] = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{x}, t) \partial_t \delta(t_r) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \partial_t (\rho(\vec{x}, t) \delta(t_r)) dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_r) \partial_t \delta(t_r) dt = [\partial_t \rho]$$

por lo que se obtiene la siguiente igualdad

$$\partial_t[\rho'] = [\partial_t \rho']$$

En integración se ha supuesto que las fuentes de carga están localizadas en una región finita del espacio y por tanto se anulan en el infinito.

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}[\rho'] &= \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\nabla} \delta(t_r) \rho(\vec{x}', t') dt' = -\frac{\vec{r}_u}{c} \partial_t \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_r) \rho(\vec{x}', t') dt' = -\frac{\vec{r}_u}{c} \partial_t [\partial_t \rho'] \\ \vec{\nabla}[\rho'] &= -\frac{\vec{r}_u}{c} \partial_t [\rho'] = -\frac{\vec{r}_u}{c} [\partial_t \rho']\end{aligned}$$

De igual forma se demuestra que

$$\vec{\nabla} \frac{[\rho']}{r} = -\frac{\vec{r}_u}{r^2} [\rho'] - \frac{\vec{r}_u}{rc} [\partial_t \rho']$$

Se pueden obtener relaciones similares para las corrientes operando de la misma forma

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot [\vec{J}] &= [\vec{\nabla} \cdot \vec{J}] - \vec{\nabla} \cdot [\vec{J}] = -\partial_t [\rho] + \frac{[\vec{J}] \cdot \vec{r}_u}{c} \\ \frac{[\vec{\nabla} \cdot \vec{J}]}{r} &= \vec{\nabla} \cdot \frac{[\vec{J}]}{r} - \vec{\nabla} \cdot \frac{[\vec{J}]}{r} \\ \vec{\nabla} \wedge [\vec{J}] &= \frac{\partial [\rho]}{\partial t} \wedge \frac{\vec{r}_u}{c} \\ \vec{\nabla} \wedge \frac{[\vec{J}]}{r} &= [\vec{J}] \wedge \frac{\vec{r}_u}{r^2} + \frac{\partial [\vec{J}]}{\partial t} \wedge \frac{\vec{r}_u}{rc}\end{aligned}$$

Son importantes también las relaciones del laplaciano

$$\begin{aligned}\nabla^2 [\vec{J}] &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 [\vec{J}]}{\partial t^2} - \frac{2}{rc} \partial_t [\vec{J}] \\ \nabla^2 \frac{[\vec{J}]}{r} &= \frac{1}{rc^2} \frac{\partial^2 [\vec{J}]}{\partial t^2} - 4\pi [\vec{J}] \delta(\vec{x} - \vec{x}')$$

Si la ecuación de la continuidad de la carga se multiplica por $1/r$ se obtiene

$$\partial_t \left[\frac{\rho'}{r} \right] = -\frac{[\vec{\nabla} \cdot \vec{J}]}{r} = -\vec{\nabla} \cdot \frac{[\vec{J}]}{r} - \vec{\nabla} \cdot \frac{[\vec{J}]}{r}$$

La anterior ecuación es la base que sirve a Heras para obtener las ecuaciones de Jefimenko para el campo electromagnético tomado respectivamente su gradiente y su derivada en el tiempo.

Tomando el gradiente en la anterior ecuación de continuidad retardada, y después de operar empleando las anteriores identidades se llega a la expresión

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \wedge \left([\vec{J}] \wedge \frac{\vec{r}_u}{r^2} + [\partial_t \vec{J}] \wedge \frac{\vec{r}_u}{rc} - \partial_t \left(\frac{\vec{r}_u}{r^2} [\rho] + \frac{\vec{r}_u}{rc} [\partial_t \rho] - \frac{\vec{r}_u}{rc^2} [\partial_t \vec{J}] \right) \right) = \\ = 4\pi [\vec{J}] \delta(\vec{x} - \vec{x}') - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{[\vec{J}]}{r} \right) \end{aligned}$$

De la derivada con respecto al tiempo de la anterior ecuación de continuidad retardada, se llega a la ecuación

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}_u}{r^2} [\rho] + \frac{\vec{r}_u}{rc} [\partial_t \rho] - \frac{\vec{r}_u}{rc^2} [\partial_t \vec{J}] \right) = 4\pi [\vec{J}] \delta(\vec{x} - \vec{x}') + \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{r}_u}{rc^2} [\partial_t \vec{J}] \right)$$

Las dos anteriores nos llevan a las ecuaciones de Jefimenko si se efectúan su integración en el espacio y se supone que las fuentes están localizadas en una región finita del espacio de forma que las integrales de superficie sean nulas.

Si la primera ecuación se multiplica por $C_E/4\pi$ y la segunda por $C_E/4\pi$ se obtiene que las ecuaciones cinemáticas de Maxwell

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = C_E \rho$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = C_B \vec{J}_e + \frac{C_B}{C_E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

donde $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son dos campos vectoriales que vienen definidos por las ecuaciones de Jefimenko

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{C_E}{4\pi} \int_{V_\infty} \left(\frac{[\rho]}{r^2} + \frac{[\partial_t \rho]}{rc} \right) \vec{r}_u d^3 \vec{x}' - \frac{1}{c^2} \int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \vec{J}]}{r} d^3 \vec{x}'$$

$$\vec{B}(\vec{x}, t) = \frac{C_B}{4\pi} \int_{V_\infty} \left(\frac{[\vec{J}]}{r^2} + \frac{[\partial_t \vec{J}]}{rc} \right) \wedge \vec{r}_u d^3 \vec{x}'$$

En sistema internacional de medidas

$$C_E = 1/\epsilon_0$$

$$C_B = \mu_0$$

Vimos que las invarianzas gauge tenían como consecuencia la conservación de la carga y las ecuaciones cinemáticas de Maxwell, y que las ecuaciones dinámicas de Maxwell se obtenían a partir de principios variacionales.

Sin embargo, la demostración de Heras invocando solo la continuidad de la carga lleva a las ecuaciones de Maxwell y las relaciones de causalidad de campo electromagnético de Jefimenko en función de la variación de las fuentes.

La electrodinámica, como consecuencia de la conservación de la carga, tiene una simetría local (invarianza gauge), que implica la invarianza ante transformaciones de una función arbitraria del espacio y del tiempo que da lugar a una libertad gauge en los potenciales de interacción.

Potenciales retardados

En el capítulo de teorías espectrales vimos que el campo eléctrico $\vec{E}$ y de inducción magnética $\vec{B}$ son directamente derivables de los potenciales retardados, mediante las funciones de Green retardadas.

Sin embargo, el análisis de los retardos merece una atención detallada ya que en ellos se oculta las claves de la relatividad y algunas implicaciones filosóficas más profundas.

A partir de los potenciales retardados

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{[\rho]}{r} d^3\vec{x}$$
$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\vec{J}]}{r} d^3\vec{x}$$

McDonald demuestra que las ecuaciones

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$$
$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$$

reproducen las ecuaciones de Jefimenko para el campo electromagnético. Esto se puede comprobar directamente con un desarrollo similar al efectuado en la sección anterior.

En general, para una distribución de fuentes arbitraria el cálculo de los potenciales es muy complejo debido a los retardos en las integrales. Ello es debido a que

$$\int_{V_\infty} [\rho] d^3\vec{x}$$

no representa la carga total del sistema ya que las diversas contribuciones a la integral son evaluadas en diferentes tiempos, y durante el tiempo que se recoge la

información las cargas se mueven para parecer más o menos densas y corrigen el valor total de carga.

Consideremos una distribución finita de carga que se desplaza a la velocidad $\vec{v}$. Si dq es la densidad de carga vista en punto de observación se verificará por el movimiento relativo y teniendo en cuenta que la información viaja a la velocidad c

$$dq = [\rho'] d^3\vec{x} = [\rho'] \frac{[\vec{r}_u \cdot \vec{v}]}{c} d^3\vec{x}$$

de lo que se obtiene

$$[\rho'] d^3\vec{x} = \frac{dq}{1 - \frac{[\vec{r}_u \cdot \vec{v}]}{c}}$$

y por tanto los potenciales se pueden expresar como

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{dq}{[r - \vec{r} \cdot \frac{\vec{v}}{c}]}$$

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\vec{v}] dq}{[r - \vec{r} \cdot \frac{\vec{v}}{c}]}$$

435

Aunque de las anteriores ecuaciones se pueden obtener fácilmente los potenciales para una carga puntual, daremos sin embargo otras demostraciones que son significativas por los conceptos físicos implicados en los retardos.

Por $\vec{x}(t)$ designamos la posición en un instante actual t y por t' el instante retardado $t' = t - r(t)/c$.

Las expresiones anteriores también se pueden obtener mediante otra argumentación. La densidad de carga y de corriente para una carga puntual que se desplaza con velocidad $\vec{v}$ la podemos escribir en función de la delta de Dirac como

$$\rho(\vec{x}, t) = q\delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = q\vec{v}\delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t))$$

donde $\vec{x}_r(t)$ es la trayectoria de la posición de la partícula.

Empleando la delta de Dirac las fuentes retardadas vendrán dada por

$$[\rho'] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_r) \rho(\vec{x}, t') dt' = q \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_r) \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t')) dt'$$

$$[\vec{r}] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_r) \vec{j}(\vec{x}, t) dt = q \int_{-\infty}^{\infty} \vec{v}(t) \delta(t_r) \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t)) dt$$

Como el tiempo retardado t' no es fijo y depende de $\vec{x}$, podemos en principio tomar un tiempo t'_0 de referencia de un punto $\vec{x}_r(t'_0)$ de la distribución de la carga y hacer un desarrollo en serie en torno a él

$$\rho(\vec{x}, t) = \rho(\vec{x}_0, t'_0)$$

$$\vec{x}_0 = \vec{x} - (t - t'_0) \vec{v}_r(t) - \frac{(t - t'_0)^2}{2} \partial_{t^2}^2 \vec{x}_r(t) = \vec{x} - (t - t'_0) \vec{v}(t) - \frac{(t - t'_0)^2}{2} \vec{a}(t)$$

Haciendo un cambio de variables de $\vec{x}$ a $\vec{x}_0$ tenemos

$$\frac{\partial x_0^k}{\partial x^l} = \delta_l^k - v^k \frac{\partial t}{\partial x^l} - a^k (t - t'_0) \frac{\partial t}{\partial x^l}$$

donde $[\vec{v}]$ es $\vec{v}$ evaluado en el tiempo retardado t' .

Puesto que $t' = t - r(t')/c$

$$\frac{dt'}{dx^k} = \frac{1}{c} \frac{d[r]}{dx^k} - \frac{[\vec{r}]^k}{c}$$

El Jacobiano de la transformación será

$$\left| \frac{\partial(x_0^k)}{\partial(x^l)} \right| \approx 1 + \frac{1}{c} [\vec{v} \cdot \vec{r}_u] + \frac{(t - t'_0)}{c} [\vec{a} \cdot \vec{r}_u] + ..$$

Para pequeñas cargas o volúmenes en que

$$[\vec{a} \cdot \vec{r}_u] (t - t'_0)/c \approx \vec{v}l/c^2 \ll 1$$

se puede considerar el primer término del desarrollo, y el elemento de volumen se transformará como

$$d^3 \vec{x} = \frac{\partial(x_0^k)}{\partial(x^l)} d^3 \vec{x}_0 = 1 + \frac{1}{c} [\vec{v} \cdot \vec{r}_u]$$

y el potencial escalar tomará la expresión

$$\begin{aligned} \phi(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{[\rho]}{r} d^3 \vec{x} \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}_0, t'_0)}{|\vec{x} - \vec{x}_0|} \frac{d^3 \vec{x}_0}{1 + \frac{1}{c} [\vec{v} \cdot \vec{r}_u]} \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left[r - \frac{1}{c} \vec{r} \cdot \vec{v} \right]_{t'_0}^{V_\infty}} \int \rho(\vec{x}_0, t'_0) d^3 \vec{x}_0 \end{aligned}$$

Ecuaciones de Lienàrd-Wiecherd

Un caso especial en que se puede resolver analíticamente las integrales retardadas para los potenciales, es el de una carga que se mueve con una velocidad constante $\vec{v}$.

Por $\vec{x}(t)$ designamos la posición en un instante actual t y por t' el instante retardado $t' = t - r(t)/c$.

La densidad de carga y de corriente para una carga puntual que se desplaza con velocidad $\vec{v}$ la podemos escribir en función de la delta de Dirac como

$$\rho(\vec{x}, t) = q\delta(\vec{x} - \vec{v}t)$$

$$\vec{j}(\vec{x}, t) = q\vec{v}\delta(\vec{x} - \vec{v}t)$$

El potencial eléctrico vendrá dado por

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t_r) dt' \int_{V_{\infty}} \frac{1}{r} \delta(\vec{x} - \vec{v}t') d^3\vec{x}' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \delta(t_r) dt'$$

donde $t_r = t' - t + r(t')/c$ y r es la distancia entre la carga y punto de observación.

Puesto que la función delta de Dirac tiene la propiedad

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(t)) f(t) dt = \sum_i \left| \frac{df}{dg} \right|_{g(t_i)=C} f(t_i)$$

donde t_i son las soluciones de la ecuación $g(t_i) = C$. Si tomamos $g(t') = t_r(t')$ y $C = 0$, será

$$\frac{dt_r}{dt'} = 1 + \frac{1}{c} \frac{dr}{dt'} = 1 - \frac{\vec{r}_u \cdot \vec{v}}{c} \quad y$$

$$t_r(t') = 0 \rightarrow t' = t - [r]/c$$

Se define

$$s \stackrel{\text{def}}{=} \left[r - \frac{1}{c} \vec{r} \cdot \vec{v} \right] = [r] \left(1 - \frac{1}{c} [\vec{r}_u \cdot \vec{v}] \right)$$

Teniendo en cuenta las anteriores propiedades de la función Delta de Dirac, y haciendo el cambio de variables de t' a t_r , obtenemos para el potencial escalar la expresión

$$\phi(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left[r - \frac{1}{c} \vec{r} \cdot \vec{v} \right]} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{s}$$

De igual forma el potencial vector vendrá dado por

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{v}}{\left[r - \frac{1}{c} \vec{r} \cdot \vec{v}\right]} = \frac{q\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{v}}{s}$$

Los anteriores potenciales se conocen como los potenciales de Lienard-Wiechard que ya fueron deducidos mediante argumentos de la extensión covariante.

El denominador s corrige a la ley de coulomb respecto al caso de la estática y debe calcularse en el tiempo retardado. Para hacer el cálculo respecto a la posición actual de la carga observemos que por simple geometría se verifica que

$$\vec{r} = [\vec{r}] - c(t - t') [\vec{v}]/c = [\vec{r}] - [r] [\vec{v}]/c$$

y por tanto

$$\begin{aligned} \vec{r}^2 - (\vec{r} \wedge \vec{v}/c)^2 &= ([r] - [\vec{r}] \cdot [\vec{v}]/c)^2 \\ [\vec{r}] \wedge [\vec{v}] &= \vec{r} \wedge [\vec{v}] \end{aligned}$$

Será por tanto

$$s^2 = \vec{r}^2 - (\vec{r} \wedge [\vec{v}]/c)^2 = r^2(1 - \sin^2 \alpha [\vec{v}]^2/c^2) = r^2(1 - [\vec{v}]^2/c^2 + (\vec{r}_u \cdot [\vec{v}]/c)^2)$$

Donde α es el ángulo que forma la dirección $\vec{r}_u$ de la posición actual de la partícula al punto de observación y la dirección de movimiento $\vec{v}$ de la misma.

Cuando en movimiento de la carga no es uniforme, el cálculo de los potenciales es más complejo, sin embargo existe un postulado importante que simplifica los cálculos.

El campo electromagnético vendrá dado por

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\vec{v} \frac{1}{s} + \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{v} \frac{1}{s} \right) \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{q\mu_0}{4\pi} \vec{v} \wedge \frac{\vec{v}}{s} \end{aligned}$$

Postulado de los retardos

Es postulado de los retardos establece que los potenciales solo dependen de la posición y velocidad retardadas.

Este postulado hasta ahora no ha sido contradicho por la experiencia tiene el mismo carácter que el tercer postulado de la relatividad de los sistemas inerciales instantáneos en que las transformaciones relativistas de Lorentz dependen solo de la velocidad instantánea y no de la aceleración que tenga en ese momento la partícula.

Como los potenciales según este postulado solo dependen de lo que haga la carga en el tiempo retardado, los potenciales serán los mismos si se supone que las cargas continúan moviéndose con una velocidad constante $\vec{v} = [\vec{v}]$ a partir del instante retardado t^- hasta el instante t .

Este postulado simplifica el cálculo de los campos, ya que se puede utilizar los potenciales de Lienard-Wiechert con la velocidad evaluada en la posición del instante retardado. Una vez que se conoce los potenciales para un movimiento arbitrario está determinada toda la electrodinámica.

Este postulado implica también la existencia de un movimiento aparente.

Consideramos un sistema de ejes de coordenadas en un punto P_0 cuyo plano (x_0, y_0) es perpendicular al vector que une P_0 con el punto fijo de observación $P(\vec{x})$, y una carga respecto del cual sigue la trayectoria que viene representada por $P_0(t^-)$

$$x_0 = x_0(t^-) \quad y_0 = y_0(t^-) \quad z_0 = z_0(t^-)$$

En el instante t de observación se debe verificar la ecuación de retardo respecto a la posición de la carga $t = t^- + r_0/c + z_0(t^-)/c$

donde r_0 es la distancia fija del punto de observación al origen $\vec{P}_0$ desde $\vec{P}$ en el instante t .

Entonces respecto al punto de observación se observa que la carga tiene un movimiento aparente en plano (x_0, y_0) de acuerdo con las ecuaciones

$$x_0 = x_0(t^-(t)) \quad y_0 = y_0(t^-(t))$$

donde $t^-(t)$ se obtiene despejando t^- en función de t en la ecuación de retardo.

Si el movimiento fuese una oscilación periódica en la dirección del eje x_0 , entonces la ecuación de movimiento aparente $x_0 = x_0(t^-(t))$ será una catenaria y su discontinuidad generaría en su derivada segunda como una aceleración generará pulsos de radiación.

Un caso de especial interés es cuando el punto de observación de los campos se encuentra a distancias que son muy grandes con la distancia que recorre la carga en un intervalo de tiempo característico de observación. En este caso el campo electromagnético de radiación se puede fácilmente calcular a partir de los potenciales como ya se vio en el capítulo de teorías espectrales.

Sin embargo, debe observarse que el gradiente $\vec{\nabla}$ actúa sobre las coordenadas del punto de observación manteniendo a t constante pero que actúa también en t^- que depende de las coordenadas de posición a través de la ecuación de retardo.

Campo electromagnético generado por una carga con movimiento arbitrario. Ecuaciones de Novozhilov y Yappa

Otra forma más directa de obtener el campo electromagnético creado por una carga puntual, es partir de las ecuaciones integrales de los potenciales en función de la delta de Dirac retardada

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{V_\infty} \frac{1}{r} \delta(t_r) \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t')) d^3\vec{x}' \\ \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{q\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int_{V_\infty} \frac{\vec{v}_r(t')}{r} \delta(t_r) \delta(\vec{x} - \vec{x}_r(t')) d^3\vec{x}'\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{r}_u}{r^2} \delta(t_r) dt' &= \left(\frac{\vec{r}_u}{r^2} \frac{1}{\frac{dt_r}{dt}} \right)_{t_r=0} = \left[\frac{\vec{r}_u}{r^2(1-v_R)} \right] \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{r}_u \wedge \vec{v}}{r} \delta(t_r) dt' &= - \frac{d}{dt_r} \left(\frac{\vec{r}_u \wedge \vec{v}}{r} \right)_{t_r=0} = - \left[\frac{1}{v_R} \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}_u \wedge \vec{v}}{(1-v_R)} \right]\end{aligned}$$

siendo

$$1 - v_R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{S}{[r]} = 1 - \frac{[\vec{r}_u \cdot \vec{v}]}{c} = 1 + \frac{1}{c} \frac{d[r]}{dt} = \frac{dt_r}{dt}$$

Las ecuaciones para el campo eléctrico $\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A}$ y $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, toman la expresión

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\vec{r}_u}{r^2} \delta(t_r) + \frac{\vec{v}/c - \vec{r}_u}{cr} \delta(t_r) \right) dt' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r}_u}{r^2(1-v_R)} + \frac{1}{c(1-v_R)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}_u - \frac{\vec{v}}{c}}{(1-v_R)r} \right) \right] \\ c\vec{B} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{cr} \delta(t_r) - \frac{1}{r^2} \delta(t_r) \right) \vec{r}_u \wedge \vec{v} dt' \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{v} \wedge \vec{r}_u}{r^2(1-v_R)} + \frac{1}{(1-v_R)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v} \wedge \vec{r}_u}{cr(1-v_R)} \right) \right]\end{aligned}$$

Estas ecuaciones todavía pueden simplificarse teniendo en cuenta que

$$\frac{d\vec{r}_u}{dt} = \frac{1}{cr} \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{\vec{r}}{cr^2} \frac{dr}{dt} = -\frac{\vec{v}}{cr} - \frac{1}{cr} (\vec{v} \cdot \vec{r}_u) \vec{r}_u = \frac{1}{cr} \vec{r}_u \wedge \vec{r}_u \wedge \vec{v}$$

con lo que se obtienen las ecuaciones de Novozhilov y Yappa

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{r}_u - \vec{v}/c}{r^2(1-v_R)^2} + \frac{\vec{r}_u}{c(1-v_R)} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r(1-v_R)} \right) - \frac{1}{c(1-v_R)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}/c}{r(1-v_R)} \right) \right] \\ c\vec{B} &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\vec{v} \wedge \vec{r}_u}{r^2(1-v_R)^2} + \frac{1}{c(1-v_R)} \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{v}}{(1-v_R)} \wedge \vec{r}_u \right) \right] \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se desprende que en vacío donde no hay fuentes $c\vec{B} = \vec{r}_u \wedge \vec{E}$

Ecuaciones de Becker

Otra forma de obtener el campo electromagnético creado por una carga puntual, es a partir de las ecuaciones integrales de los potenciales en función de la delta de Dirac retardada antes obtenidas

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\vec{r}_u}{r^2} \delta(t_r) - \frac{1}{rc} \left(\vec{r}_u - \frac{\vec{v}(t)}{c} \right) \delta'(t_r) \right) dt' \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\vec{v} \wedge \vec{r}_u}{r^2} \delta(t_r) - \frac{\vec{v} \wedge \vec{r}_u}{rc} \delta'(t_r) \right) dt' \end{aligned}$$

441

emplenado la siguiente igualdad

$$\partial_t \delta\left(t' - t + \frac{r}{c}\right) = \left(1 - \frac{1}{c} \vec{r}_u \cdot \vec{v}\right) \delta'\left(t' - t + \frac{r}{c}\right)$$

y las propiedades de función delta de Dirac definidas anteriormente, con lo que se obtiene las ecuaciones de Becker para el campo electromagnético producido por una carga con movimiento arbitrario

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\left(\vec{r} - r \frac{\vec{v}}{c} \right) \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{\left(r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c} \right)^3} + \frac{\vec{r} \wedge \left(\left(\vec{r} - r \frac{\vec{v}}{c} \right) \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \right)}{c^2 \left(r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c} \right)^3} \right] \\ \vec{B}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \left[\frac{\vec{v} \wedge \vec{r} \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)}{c \left(r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c} \right)^3} + \frac{\vec{r} \wedge \left(\vec{r} \wedge \left(\vec{r} - r \frac{\vec{v}}{c} \right) \wedge \frac{d\vec{v}}{dt} \right)}{c^2 r \left(r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c} \right)^3} \right] \end{aligned}$$

estando los campos evaluados en el tiempo retardado.

Obsérvese que los campos solo dependen de la velocidad y su aceleración retardada, y que además $\vec{B}$ es perpendicular a $\vec{E}$

$$c\vec{B} = \vec{r}_u \wedge \vec{E}$$

y ambos se encuentran en el plano perpendicular al vector de observación en la posición retardada.

Obsérvese también que los términos proporcionales a la aceleración $d\vec{v}/dt$ decaen como $1/r$ y están asociados a la radiación, mientras que los otros términos que no dependen de la aceleración decaen como $1/r^2$ y están asociados al carácter estático del campo.

También podríamos haber calculado los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ a partir de los potenciales calculando directamente el gradiente $\vec{\nabla}$, el rotacional $\vec{\nabla} \wedge$ y la derivada respecto t a los potenciales

Para ello son útiles las identidades que se desarrollan a continuación.

Como $r = c(t - t')$ y $t' = t - r(t')/c$ será

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{\partial r}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} = -\vec{r}_u \cdot \vec{v} \frac{\partial t'}{\partial t} = c \left(1 - \frac{\partial t'}{\partial t} \right)$$

De $r^2 = \vec{r}^2$ se obtiene derivando respecto a t y empleando la anterior ecuación se deriva la relación

$$\frac{\partial r}{\partial t} = -\vec{r}_u \cdot \vec{v}(t')$$

A partir de la cual se obtiene la identidad

$$\frac{\partial t'}{\partial t} = -\frac{1}{1 - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{rc}}$$

De igual forma

$$\vec{\nabla} t' = -\frac{1}{c} \vec{\nabla} r = -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial r}{\partial t'} \vec{\nabla} t' + \frac{\vec{r}}{r} \right)$$

que se puede reescribir como

$$\vec{\nabla} t' = -\frac{\vec{r}}{c \left(r - \frac{\vec{r} \cdot \vec{v}}{c} \right)}$$

Muchas veces los campos vectoriales ϕ^β están referidos a los instantes retardados $t' = t - r(t')/c$ como en los potenciales de Lienàrd-Wiecherd $\phi^\beta = \phi^\beta(\vec{x}, \vec{x}'(t'), t, t')$. En este caso

$$\left(\frac{\partial \phi^\beta}{\partial t}\right)_{\vec{x}} = \frac{\partial \phi^\beta}{\partial t} + \frac{\partial \phi^\beta}{\partial t'} \left(\frac{\partial t'}{\partial t}\right)_{\vec{x}}$$

$$\left(\frac{\partial \phi^\beta}{\partial t'}\right)_{\vec{x}} = \frac{\partial \phi^\beta}{\partial t'} + \frac{\partial \phi^\beta}{\partial t} \left(\frac{\partial t}{\partial t'}\right)_{\vec{x}}$$

Como $(\partial t'/\partial t)_{\vec{x}} = (\partial t/\partial t')_{\vec{x}}$ será

$$\left(\frac{\partial \phi^\beta}{\partial t}\right)_{\vec{x}} = \left(\frac{\partial \phi^\beta}{\partial t'}\right)_{\vec{x}} \frac{\partial t'}{\partial t}$$

De igual forma

$$(\vec{\nabla} \phi^\beta)_t = (\vec{\nabla} \phi^\beta)_{t,t'} - \left(\frac{\partial \phi^\beta}{\partial t'}\right)_{\vec{x},t} \vec{\nabla} t'$$

Empleando las anteriores identidades cuando se aplican a los potenciales retardados de de Lienàrd-Wiecherd para el cálculo directo de los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$, se reproducen otra vez las ecuaciones de Becker

En el caso especial en la carga está en reposo y se empieza a acelerar en el tiempo t'_0 , el campo observado en el instante $t = t'_0 + r/c$ a grandes distancias viene dado por

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left(\left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right] \wedge \vec{r}_u \wedge \vec{r}_u \right)$$

$$c\vec{B}(\vec{x}, t) = \vec{r}_u \wedge \vec{E}$$

Vemos que $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se encuentran en el plano perpendicular a dirección $\vec{r}_u$ de observación, y puesto que es $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, entonces será $\vec{r}_u \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$, lo que indica que $\vec{E}$ es un campo transversal.

De igual forma, cuando la velocidad de la carga es pequeña $[v]/c \ll 1$, entonces

$$\left[r - \frac{r\vec{v}}{c} \right] \approx r \quad y$$

$$s = [r - \vec{r} \cdot \vec{v}/c] \approx r$$

y las formulas de Becker para el campo de radiación que va como $1/r$ se reducen otra vez a

$$\vec{E}(\vec{x}, t) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left(\left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right] \wedge \vec{r}_u \wedge \vec{r}_u \right)$$

$$c\vec{B}(\vec{x}, t) \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left(\vec{r}_u \wedge \vec{r}_u \wedge \vec{r}_u \wedge \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right] \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right] \wedge \vec{r}_u = \vec{r}_u \wedge \vec{E}$$

El vector Poynting del campo de radiación vendrá dado por

$$\vec{S}_{rad} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \wedge \vec{B} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^2} \left(\vec{r}_u \wedge \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right] \right)^2 \vec{r}_u = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3 r^5} \left(\vec{r} \wedge \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right] \right)^2 \vec{r}$$

La potencia de energía radiada que atraviesa la superficie esférica de radio r será entonces, si se elige la dirección del eje z igual que la de $[d\vec{v}/dt]$

$$P_{rad} = \int \vec{S}_{rad} \cdot \vec{n} dS = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \frac{1}{r^2} \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right]^2 \sin^2(\theta) 4\pi r^2 \sin(\theta) d\theta = \frac{q^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \left[\frac{d\vec{v}}{dt} \right]^2$$

que es la misma expresión que ya obtuvimos para el flujo de energía de una carga oscilante.

El flujo de de energía radiado debe ser igual a la disminución de la energía de la partícula y del campo dentro de la esfera

Además a consecuencia de la simetría del flujo de energía el momento total de la carga y del campo electromagnético dentro de la esfera debe permanecer constante.

La energía emitida durante un tiempo dt está localizada entre dos esferas de radio r alrededor del punto $\vec{x}_2$ y la otra de radio $r + cdt$ alrededor del punto $\vec{x}_1$ a una distancia $-\vec{v}dt$ respecto a la otra posición.

Puesto que el elemento de volumen esférico es $d^3\vec{x} = r^2 d\Omega dr$ se verificará entonces

$$d^3\vec{x} = r^2 d\Omega (cdt - \vec{r}_u \cdot \vec{v}dt) = r^2 (c - \vec{r}_u \cdot \vec{v}) dt d\Omega$$

donde ahora $d\Omega$ es el elemento ángulo sólido subtendido desde $\vec{x}_2$.

La energía contenida dentro de $d\vec{x}$ será

$$dw_{rad} = \frac{\epsilon_0}{2} (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2) r^2 (c - \vec{r}_u \cdot \vec{v}) d\Omega dt$$

Si se hace la integración a todo el espacio se obtiene que dicha energía es igual a la que pierde la partícula por radiación obtenida anteriormente.

Las fórmulas que obtuvimos anteriormente para el campo electromagnético están referidas a la posición retardada. En el caso de una carga acelerada es imposible expresar los potenciales en términos de la posición presente solamente.

Solo en el caso de una carga que se mueve con velocidad constante es posible poner las formulas del campo electromagnético con relación a la posición real en el tiempo presente de observación

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(\vec{r}^2 - \left(\vec{r} \wedge \frac{\vec{v}}{c}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2\varphi\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{E}$$

En el caso de que una carga se mueva con velocidad constante no hay radiación de energía.

El campo eléctrico se expande perpendicularmente a la dirección en el factor $\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ y se comprime en la dirección paralela en γ^{-2} por lo que a altas velocidades se le ve como un campo transversal.

Para velocidades no relativistas $v \ll c$ las ecuaciones para $\vec{E}$ y $\vec{B}$ se reducen a las leyes Coulomb y de Biot-Savart.

$$\vec{E} \approx \frac{q\vec{r}_u}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{y} \quad \vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \wedge \vec{E}$$

que corresponde a un campo de Coulomb que se desplaza conjuntamente con la carga.

Para un campo creado por una que se mueve uniformemente, por invarianza traslacional deberá cumplirse

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$$

ya que el campo en un instante $t + dt$ es el mismo que el trasladado a una distancia $\vec{v}dt$ en la dirección del movimiento.

En el caso de movimiento uniforme, esta relación permite eliminar para un campo que verifique una ecuación de ondas con un término inhomogéneo que no dependa del tiempo eliminar las derivadas parciales temporales y reducir la ecuación a solo términos espaciales cuya integración es inmediata, lo que nos vuelve a llevar los potenciales de Lienard-Wiecherd.

Supongamos un campo ψ que verifica la ecuación de ondas

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -f(\vec{x})$$

Si la carga se mueve uniformemente según el eje x podemos hacer el cambio

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$$

con lo que obtenemos

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -f(\vec{x})$$

que es una ecuación de Poisson con un factor de escala $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ en la variable x y cuya solución vendrá dada por

$$\psi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{f(\vec{x}')}{s} d^3\vec{x}'$$

siendo

$$s = \sqrt{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

Aplicando esto al caso de una carga puntual, los potenciales al verificar una ecuación de ondas no homogénea, tendrán entonces las soluciones para los potenciales

$$\phi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{s} \quad \text{y}$$

$$\vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}}{s}$$

que son las mismas que obtuvimos anteriormente por otros procedimientos.

Este resultado es equivalente a hacer una transformación relativista de Lorentz de coordenadas y del cuadriector $(\phi, c\vec{A})$ desde el sistema en que la carga está en reposo (en el que solo existe un campo radial electrostático ϕ con $\vec{A} = 0$) al del observador en el sistema de la carga se mueve con velocidad $\vec{v}$.

Lorentz y Poincaré fueron los primeros en descubrir estas transformaciones para la electrodinámica, pero fue Einstein el que postuló su validez universal para todos los sistemas físicos que se mueven relativamente uno respecto a otros con velocidad constante.

Ecuaciones de Feynman

Existen otras de obtener el campo electromagnético creado por una carga a partir de las ecuaciones integrales de los potenciales en función de la delta de Dirac retardada

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \delta(t_r) dt' \quad y \\ \vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{v}(t')}{r} \delta(t_r) dt'\end{aligned}$$

Para el cálculo del campo electromagnético reescribiremos ahora los gradientes de una forma diferente

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{\vec{r}_u}{r^2} \delta(t_r) + \frac{\vec{r}_u}{rc} \delta'(t_r) \right) dt' \\ &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(1-v_R)} \left[\frac{\vec{r}_u}{r^2} \right] + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c(1-v_R)} \frac{d}{dt'} \left[\frac{\vec{r}_u}{r(1-v_R)} \right]\end{aligned}$$

siendo

$$1 - v_R \stackrel{\text{def}}{=} \frac{s}{[r]} = 1 - \frac{[\vec{r}_u \cdot \vec{v}]}{c} = 1 + \frac{1}{c} \frac{d[r]}{dt'} = \frac{dt_r}{dt'}$$

447

y habiéndose hecho uso de la propiedad de la delta de Dirac

$$\begin{aligned}\delta(t_r(t')) &= \sum_i \frac{\delta(t' - t'_i)}{\left| \frac{dt_r}{dt'} \right|_{t'=t'_i}} \quad \text{con} \quad t_r(t'_i) = 0 \quad y \\ \delta'(t_r) &= \frac{d}{dt_r} \delta(t_r) = \left(\frac{dt_r}{dt'} \right)^{-1} \frac{d\delta}{dt'} = \frac{1}{\left[1 - \frac{\vec{r}_u \cdot \vec{v}}{c} \right]} = \frac{1}{(1-v_R)} \frac{d\delta}{dt'}\end{aligned}$$

De igual forma se obtiene

$$\partial_t \vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{v}(t')}{rc^2} \delta'(t_r) dt' = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2(1-v_R)} \frac{d}{dt'} \left[\frac{\vec{v}}{r(1-v_R)} \right]$$

Con lo que se obtiene las expresiones de Janah que sirven de punto de partida para distintas formulaciones del campo electromagnético

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \partial_t \vec{A} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(1-v_R)} \left[\frac{\vec{r}_u}{r^2} \right] + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c(1-v_R)} \frac{d}{dt} \left[\frac{\left(\vec{r}_u - \frac{\vec{v}}{c} \right)}{r(1-v_R)} \right]$$

$$c\vec{B} = [\vec{r}_u] \wedge \vec{E}$$

A partir de estas expresiones se pueden seguir varias alternativas.

Si se efectúa directamente la derivada en t^* , y se emplea la igualdad

$$\frac{dv_R}{dt^*} = \frac{1}{c} \left[\frac{d}{dt^*} \vec{r}_u \cdot \vec{v} \right]$$

se tiene que

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{q} \vec{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\vec{r}_u}{r^2} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{r}_u - \vec{v}/c}{rc(1-v_R)} \right) \right) \delta(t_r) dt^* = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\vec{r}_u}{r^2} \delta(t_r) + \frac{1}{rc} \left(\vec{r}_u - \frac{\vec{v}(t_r)}{c} \right) \delta'(t_r) \right) dt^*$$

lo que nos lleva otra vez a las ecuaciones de Becker, obtenidas anteriormente.

La expresión de Janah para el campo electromagnético se puede describir como

$$\frac{4\pi\epsilon_0}{q} \vec{E} = \left[\frac{1}{(1-v_R)} \frac{\vec{r}_u}{r^2} \right] + \frac{1}{c(1-v_R)} \frac{d}{dt^*} \left[\frac{(\vec{r}_u - \vec{v}/c)}{r(1-v_R)} \right] \quad y$$

$$c\vec{B} = [\vec{r}_u] \wedge \vec{E}$$

Si derivamos la relación $t^* = t - r/c$ respecto a t obtenemos las igualdades

$$\frac{dt^*}{dt} = \frac{1}{1-v_R} = 1 - \frac{1}{c} \frac{d[r]}{dt} \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{\dot{r}}{c}$$

La primera igualdad se obtiene viendo que si $f(r, t, t^*) = t^* - t + r/c = 0$ entonces se verifica que

$$\left(\frac{\partial t^*}{\partial t} \right)_r = \left(\frac{\partial t^*}{\partial t} \right)_r$$

Empleando la anterior relación, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{4\pi\epsilon_0}{q} \vec{E} &= \left[\frac{\vec{r}_u}{r^2} \left(1 - \frac{\dot{r}}{c} \right) \right] + \frac{1}{c} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{r} \left(\vec{r}_u - \frac{\vec{v}}{c} \right) \left(1 - \frac{\dot{r}}{c} \right) \right] \\ &= \left[\frac{\vec{r}_u}{r^2} \right] + \left[\left(\frac{1}{c} \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}_u}{r} \right) - \left[\frac{\vec{r}_u \dot{r}}{r^2} \right] \right] + \left[\left(\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \vec{r}_u r \right) \right) - \left[\frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}_u \dot{r}}{r} \right] \right] \\ &= \left[\frac{\vec{r}_u}{r^2} \right] + \left[\frac{r}{c} \frac{d}{dt} \frac{\vec{r}_u}{r^2} \right] + \left[\frac{1}{c^2} \frac{d^2 \vec{r}_u}{dt^2} \right] \end{aligned}$$

La anterior expresión es conocida como la formula de Feynman para el campo electromagnético generado por una carga con movimiento arbitrario, junto con la ecuación

$$c\vec{B} = [\vec{r}_u] \wedge \vec{E}$$

Ecuaciones de Panofsky y Philips

Ya vimos que de la ecuación de la continuidad de la carga se obtiene la relación

$$\vec{\nabla} \cdot [\vec{j}] = [\vec{\nabla} \cdot \vec{j}] + \frac{[\partial_t \vec{j}] \cdot \vec{r}_u}{c} = -[\partial_t \rho] + \frac{[\partial_t \vec{j}] \cdot \vec{r}_u}{c}$$

Multiplicando por $\vec{r}_u/r$ e integrando se obtiene

$$\int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \rho] \vec{r}_u}{r} d^3x = - \int_{V_\infty} \frac{[\vec{\nabla} \cdot \vec{j}] \vec{r}_u}{r} d^3x + \int_{V_\infty} \frac{([\partial_t \vec{j}] \cdot \vec{r}_u) \vec{r}_u}{cr} d^3x$$

La primera integral se transforma efectuando un integración por partes en

$$\begin{aligned} - \int_{V_\infty} \frac{[\vec{\nabla} \cdot \vec{j}] \vec{r}_u}{r} d^3x &= \int_{V_\infty} \partial_k \left(\frac{[\vec{j}^k] \vec{r}_u}{r} \right) d^3x - \int_{V_\infty} \frac{2([\vec{j}] \cdot \vec{r}_u) \vec{r}_u - [\vec{j}]}{r^2} d^3x \\ &= \int_{V_\infty} \frac{([\vec{j}] \cdot \vec{r}_u) \vec{r}_u - \vec{r}_u \wedge [\vec{j}] \wedge \vec{r}_u}{r^2} d^3x \end{aligned}$$

449

La segunda integral se puede expresar como

$$\int_{V_\infty} \frac{([\partial_t \vec{j}] \cdot \vec{r}_u) \vec{r}_u}{cr} d^3x = \int_{V_\infty} \frac{([\partial_t \vec{j}] - \vec{r}_u \wedge [\partial_t \vec{j}] \wedge \vec{r}_u)}{cr} d^3x$$

Por tanto, será

$$\int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \rho] \vec{r}_u}{r} d^3x = \int_{V_\infty} \frac{([\vec{j}] \cdot \vec{r}_u) \vec{r}_u - \vec{r}_u \wedge [\vec{j}] \wedge \vec{r}_u}{r^2} d^3x + \int_{V_\infty} \frac{([\vec{j}] - \vec{r}_u \wedge [\vec{j}] \wedge \vec{r}_u)}{cr} d^3x$$

Puesto que

$$\vec{\nabla} \phi(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \left(\frac{[\rho]}{r} \right) d^3\vec{x} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\vec{r}_u}{r^2} [\rho] d^3\vec{x} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\vec{r}_u}{rc} [\partial_t \rho] d^3\vec{x}$$

$$\partial_t \vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\partial_t J]}{r} d^3 \vec{x}'$$

entonces el campo eléctrico y magnético

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla} \phi - \partial_t \vec{A} \quad y \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{A}\end{aligned}$$

vienen dados por

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\vec{r}_u}{r^2} [\rho] d^3 \vec{x}' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{([\vec{J}] \cdot \vec{r}_u) \vec{r}_u - \vec{r}_u \wedge [\vec{J}] \wedge \vec{r}_u}{r^2} d^3 \vec{x}' + \int_{V_\infty} \frac{\vec{r}_u \wedge [\partial_t \vec{J}] \wedge \vec{r}_u}{cr} d^3 \vec{x}' \\ \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{[\vec{J}]}{r} \right) d^3 \vec{x}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V_\infty} \frac{[\vec{J}] \wedge \vec{r}_u}{r^2} d^3 \vec{x}' + \frac{\mu_0}{4\pi c} \int_{V_\infty} \frac{[\partial_t \vec{J}] \wedge \vec{r}_u}{r^2} d^3 \vec{x}'\end{aligned}$$

Las ecuaciones son conocidas como las formulas de Panofsky y Philips, y que ya fueron deducidas anteriormente mediante las teorías espectrales.

Un hecho a destacar es que la radiación electromagnética que se propaga en el espacio libre, no es afectada por las fuentes que lo generan una vez producida.

Aunque todas las formulaciones que hemos visto para el campo creado por cargas en movimiento son equivalentes y son gauge invariantes, sin embargo, no son covariantes, y por ello pueden tomar distintas expresiones vectoriales.

Radiación dipolar y cuadripolar eléctrica y magnética

En el capítulo de teorías de los sistemas móviles, vimos como se calcula la radiación dipolar eléctrica y magnética a partir de los potenciales de Hertz. En esta sección, los calcularemos a partir de los potenciales retardados. que en el vacío en regiones donde no hay fuentes, vienen dados por

$$\begin{aligned}\phi(\vec{x}, t) &= \int_{V_\infty} \frac{\rho(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{4\pi\epsilon_0 |\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}' \\ \vec{A}(\vec{x}, t) &= \int_{V_\infty} \frac{\mu_0 \vec{J}(\vec{x}', t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c)}{4\pi |\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}'\end{aligned}$$

Como ya hemos visto, debido a la velocidad finita c de propagación de la luz las fuentes tienen que ser evaluadas en el tiempo retardado $t_r = t - |\vec{x} - \vec{x}'|/c$.

Para campos lejanos de las fuentes, en los que las dimensiones de estas son mucho menores que la distancia $|\vec{x}|$ al punto de observación, se puede utilizar un retardo constante $t_{r0} = t - |\vec{x}|/c$ y el denominador sacarlo fuera de la integral con lo que se simplifica la integración

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{x}, t) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|} \int_{V_\infty} \left(\vec{J}(\vec{x}', t_{r0}) + \frac{\vec{x} \cdot \vec{x}'}{c|\vec{x}|} \frac{\partial \vec{J}(\vec{x}', t_{r0})}{\partial t_{r0}} \right) d^3x' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{x}|} \int_{V_\infty} \vec{J}(\vec{x}', t_{r0}) d^3x' + \frac{\mu_0}{4\pi c|\vec{x}|} \frac{\partial}{\partial t_{r0}} \int_{V_\infty} \vec{J}(\vec{x}', t_{r0}) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot \vec{x}' d^3x'\end{aligned}$$

donde suponemos ahora que la fuentes están situadas en el origen de coordenadas.

El primer término nos da un dipolo eléctrico oscilante ya que

$$\int_{V_\infty} \vec{J} d^3x' = - \int_{V_\infty} \vec{x}' \vec{\nabla}' \cdot \vec{J} d^3x' = \int_{V_\infty} \vec{x}' \frac{\partial \rho(\vec{x}', t_r)}{\partial t} d^3x' = \dot{\vec{d}}$$

y para campos lejanos en la zona de ondas se obtiene el campo de un dipolo eléctrico oscilante

$$\begin{aligned}\phi_{de}(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x} \cdot \dot{\vec{d}}(t_r)}{c|\vec{x}|^2} \\ \vec{A}_{de}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{d}}(t_r)}{|\vec{x}|}\end{aligned}$$

A partir de estas formulas, se llega también a la expresión anteriormente obtenida para la energía radiada por un dipolo eléctrico y una antena, que ya se dedujo en el capítulo de transformaciones vectoriales por otros procedimientos.

El segundo término a la integral del potencial, aunque es de un orden magnitud inferior, tiene también un interés especial.

De la identidad vectorial

$$2\vec{a}\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \wedge \vec{a} \wedge \vec{b} + (\vec{a}\vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{b}\vec{a} \cdot \vec{c})$$

se obtiene

$$\begin{aligned}&\int_{V_\infty} \vec{J}(\vec{x}', t_{r0}) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot \vec{x}' d^3x' = \\ &= \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{x}' \wedge \vec{J}_T(\vec{x}', t_{r0}) \wedge \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} d^3x' + \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \left(\vec{J}(\vec{x}', t_{r0}) \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot \vec{x}' + \vec{J}(\vec{x}', t_{r0}) \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \vec{x}' \right) d^3x'\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición de dipolo magnético

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \int_{V_\infty} \vec{x} \wedge \vec{j}(\vec{x}, t_{r0}) d^3x = \frac{I}{2} \oint \vec{x} \wedge d\vec{l} = I\vec{S}$$

y de cuadrupolo eléctrico

$$\int_{V_\infty} (\vec{j}(\vec{x}, t_{r0}) \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} + \vec{j}_T(\vec{x}, t_{r0}) \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \vec{x}) d^3x = \frac{d}{dt_{r0}} \int_{V_\infty} \rho(\vec{x}, t_{r0}) \vec{x} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|} \cdot \vec{x} d^3x = \frac{1}{3} \ddot{Q} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

siendo

$$\ddot{Q} = (Q^{ij}) = \int_{V_\infty} \rho(\vec{x}, t_{r0}) x^i x^j d^3x$$

El potencial vector teniendo en cuenta todos los términos, se podrá escribir como

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{d}}(t_r)}{|\vec{x}|} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\vec{m}}(t_r) \wedge \vec{x}}{c|\vec{x}|^2} + \frac{\mu_0}{24\pi c} \ddot{\vec{Q}} \cdot \frac{\vec{x}}{|\vec{x}|}$$

El segundo término que produce la radiación dipolar magnética que es más pequeña que la radiación dipolar eléctrica en un factor del orden de $(v/c)^2$.

Fuerzas y energías de interacción electromagnética entre cargas en movimiento

La fuerza que actuaría sobre otra carga q_2 situada en el campo de la carga q_1 que se mueve una velocidad $\vec{v}_2$ uniforme sería aplicando la fuerza de Lorentz a las ecuaciones de Liénard-Wiechert

$$\begin{aligned} \vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} &= q_2 \left(\vec{E}_2 + \vec{v}_2 m_r \vec{v}_r + \sum_{r' \neq r}^N \frac{q_r q_{r'}}{8\pi\epsilon_0 c^2 |\vec{r}_{rr'}|} (\vec{v}_{r'} + \vec{r}_{urr'} \vec{v}_{r'} \cdot \vec{r}_{urr'}) \vec{B}_2 \right) \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\vec{v}_2 \frac{1}{s} + \frac{1}{c^2} (\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2) \frac{1}{s} - \frac{1}{c^2} \vec{v}_2 \wedge \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2 \frac{1}{s} \right) \end{aligned}$$

Es fácil comprobar que $\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2}$ y $\vec{F}_{q_2 \rightarrow q_1}$ no son colineales y por tanto la segunda ley de Newton de acción y reacción no se cumple en general en las fuerzas electrodinámicas entre dos cargas en movimiento.

Tampoco existe un momento neto por dichas fuerzas alrededor de un eje perpendicular a la línea de unión de las cargas y la dirección de movimiento como sería de esperar, ya que por efectos relativistas de las tensiones que deben existir para mantener próximas las dos cargas se produce un segundo momento relativista que compensa al anterior, lo que se conoce como paradoja de Trouton y Noble, ya que experimentalmente midieron la ausencia del par de fuerzas.

Esto es debido a que el equilibrio es una propiedad invariante ante las transformaciones relativistas de Lorentz, y si un observador se mueve con velocidad $\vec{v}$ las cargas para él se encuentran en reposo y solo existe las fuerzas de Coulomb que si cumplen con la segunda ley de Newton de acción y reacción.

Solo en el caso de ambas cargas se muevan paralelamente con igual velocidad o perpendicularmente a $\vec{v}$ se cumple la ley de acción y reacción y las fuerzas con colineales.

Las fuerzas sobre las cargas en este caso derivan de un potencial ψ_c denominado habitualmente como potencial de convección.

$$\vec{F}_{q_1 \rightarrow q_2} = -\frac{q_1 q_2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla}_2 \frac{1}{r} = -\vec{\nabla}_2 \psi_c$$

por lo que tienen la dirección de la normal al elipsoide $s = C^{te}$

453

El potencial de convección desempeña un papel importante en el los conductores lineales hechos de filamentos ya que las fuerzas sobre la cargas tiende a separarlos, lo que explica su enrollamiento en espiral para minimizar las tensiones de separación.

Cuando hay varias partículas que interaccionan entre ellas, no es posible definir una lagrangiana o una energía potencial global, debido a que cada partícula tiene un tiempo propio diferente.

Solo en el caso cuasiestático, en que los efectos relativistas debidos los retardos en la propagación de las interacciones son despreciables, es posible definir una lagrangiana para el conjunto del sistema.

El potencial eléctrico creado por una distribución de carga q_1 , de pequeñas dimensiones y cuando las variaciones con el tiempo suficientemente lentas comparadas con los tiempos de propagación, vendrá dado por el desarrollo en términos de r

$$\begin{aligned}\phi_1(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho_1\left(\vec{x}', t - \frac{r(t')}{c}\right)}{r} d^3x' \\ &\approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho_1(\vec{x}', t)}{r} d^3x' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \partial_t \rho_1(\vec{x}', t) d^3x' + \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_\infty} \rho_1(\vec{x}', t) d^3x' \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \frac{\rho_1 \rho(\vec{x}', t)}{r} d^3x' - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V_\infty} \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_1 d^3x' + \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_{V_\infty} \rho_1(\vec{x}', t) r d^3x'\end{aligned}$$

y para una carga puntual

$$\rho_1(\vec{x}, t) = q_1 \delta(\vec{x} - \vec{x}_1(t))$$

será

$$\phi_1(\vec{x}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_1|} - \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} |\vec{r}_1| + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{r}_1(t)|} - \frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \partial_t \left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{r}_1}{|\vec{r}_1|} \right)$$

siendo

$$\vec{r}_1(t) = \vec{x} - \vec{x}_1(t) \quad \text{y} \quad \vec{v}_1 = d\vec{x}_1/dt$$

El potencial vector en una aproximación cuasiestática, en primer orden del desarrollo vendrá dado por

$$\vec{A}_1(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0 q_1 \vec{v}_1}{4\pi |\vec{r}_1|}$$

si se hace una transformación gauge

$$\begin{aligned}\vec{A}_1 &\rightarrow \vec{A}_1 + \vec{\nabla} \Lambda_1 \\ \phi_1 &\rightarrow \phi_1 - \partial_t \Lambda_1\end{aligned}$$

con el gauge

$$\Lambda_1(\vec{x}, t) = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{r}_1}{|\vec{r}_1|}$$

los potenciales toman entonces la expresión

$$\begin{aligned}\phi_1(\vec{x}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1(t)|} \\ \vec{A}_1(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0}{8\pi} \left(\frac{\vec{v}_1}{|\vec{x} - \vec{x}_1(t)|} + \frac{(\vec{x} - \vec{x}_1(t)) \vec{v}_1 \cdot (\vec{x} - \vec{x}_1(t))}{|\vec{x} - \vec{x}_1(t)|^3} \right)\end{aligned}$$

Con este gauge el potencial vector es solenoidal $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}_1 = 0$

En presencia de otra carga q_2 situada en $\vec{x} = \vec{x}_2(t)$, en término de interacción de la lagrangiana viene dado por

$$L_{in} = -q_2\phi_1(\vec{x}_2, t) + q_2\vec{v}_2 \cdot \vec{A}_1(\vec{x}_2, t) \\ = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} + \frac{\mu_0q_1q_2}{8\pi c^2\epsilon_0} \left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|} + \frac{\vec{v}_2 \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)\vec{v}_1 \cdot (\vec{x}_2 - \vec{x}_1)}{|\vec{x}_2 - \vec{x}_1|^3} \right)$$

que es simétrico en la permutación de la carga 1 y 2.

Esta interacción representa una interacción a distancia instantánea conocida como la interacción de Darwin-Breit.

La lagrangiana total vendrá dada sumándole la parte de materia libre

$$L = -m_{01}c^2 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}} - m_{02}c^2 \sqrt{1 - \frac{v_2^2}{c^2}} + L_{in}$$

que es conocida como la lagrangiana de Darwin.

En el caso de que existan N cargas puntuales que interaccionan, la lagrangiana de Darwin viene dada por

$$L = -\sum_r^N m_{0r}c^2 \sqrt{1 - \frac{v_r^2}{c^2}} - \sum_{\substack{r, r' \\ r \neq r'}}^N \frac{q_r q_{r'}}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r}_{rr'}|} \left(1 - \frac{1}{2c^2} (\vec{v}_r \cdot \vec{v}_{r'} - \vec{v}_r \cdot \vec{r}_{urr'} \vec{v}_{r'} \cdot \vec{r}_{urr'}) \right)$$

455

siendo

$$\vec{r}_{rr'} = \vec{x}_r - \vec{x}_{r'} \\ \vec{r}_{urr'} = \frac{\vec{x}_{rr'}}{|\vec{x}_{rr'}|}$$

El momento canónico vendrá dado por

$$\vec{p}_r = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_r} = m_r \vec{v}_r + \sum_{\substack{r' \\ r' \neq r}}^N \frac{q_r q_{r'}}{8\pi\epsilon_0 c^2 |\vec{r}_{rr'}|} (\vec{v}_{r'} + \vec{r}_{urr'} \vec{v}_r \cdot \vec{r}_{urr'})$$

y las ecuaciones de Euler-Lagrange para el movimiento serán

$$\frac{d\vec{p}_r}{dt} = \frac{\partial L}{\partial \vec{x}_r}$$

En primera aproximación si hacemos

$$\vec{v}_r = \vec{p}_r / m_r$$

en la ecuación de los momentos, obtenemos por iteración en segundo orden

$$m_r \vec{v}_r = \vec{p}_r - \sum_{\substack{r' \\ r' \neq r}}^N \frac{q_r q_{r'}}{8\pi\epsilon_0 c^2 m_{r'} |\vec{r}_{rr'}|} (\vec{p}_{r'} + \vec{r}_{urr'} \vec{p}_{r'} \cdot \vec{r}_{urr'})$$

El hamiltoniano vendrá dado por

$$\begin{aligned} H &= \sum_r^N \vec{p}_r \vec{v}_r - L \\ &= \sum_r^N \left(m_{0r} c^2 + \frac{\vec{p}_r^2}{2m_{0r}} \right) + \sum_{\substack{r' \\ r' \neq r}}^N \frac{q_r q_{r'}}{8\pi\epsilon_0 c^2 |\vec{r}_{rr'}|} \left(1 - \frac{\vec{p}_r \cdot \vec{p}_{r'} - (\vec{p}_r \cdot \vec{r}_{urr'}) (\vec{p}_{r'} \cdot \vec{r}_{urr'})}{2m_{0r}^2 c^2} \right) \end{aligned}$$

habiéndose aproximado $m_r \approx m_{0r} (1 - v_r^2/2c^2)$

Se define la energía potencial V y la energía E del sistema como

$$\begin{aligned} V &= \sum_{\substack{r, r' \\ r' \neq r}}^N \frac{q_r q_{r'}}{8\pi\epsilon_0 c^2 |\vec{r}_{rr'}|} + \sum_{r'}^N U_{r'} \\ E &= \sum_r^N \frac{\vec{p}_r^2}{2m_{0r}} + V = \sum_r^N \frac{m_{0r} \vec{v}_r^2}{2} + V \end{aligned}$$

donde U_r representa un posible potencial externo para la partícula r .

La ecuación de movimiento se reduce entonces a las expresiones de la física clásica

$$m_{0r} \frac{d\vec{p}_r}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial \vec{x}_r}$$